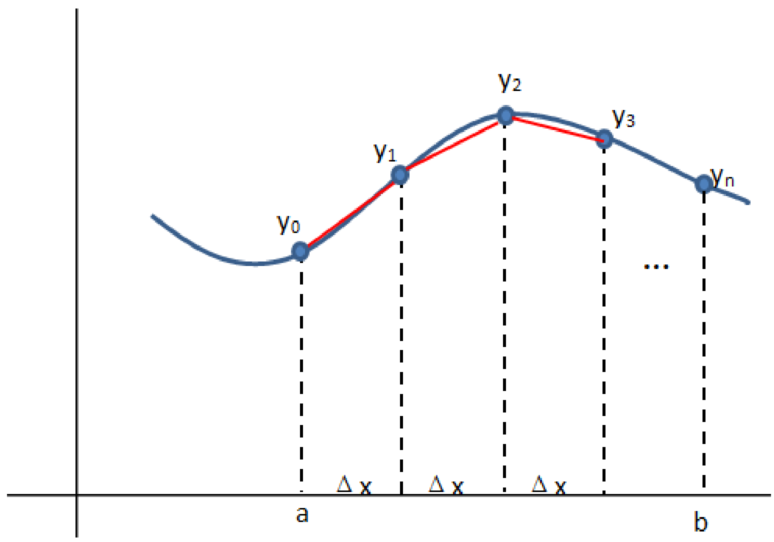
单变量微积分笔记25——弧长和曲面面积

积分的概念来源于实际应用。对一个函数积分可以理解为求曲线下的面积，但积分的作用不仅仅如此。作为牛顿一生最伟大的发明，有了积分，我们就可以去计算曲线的弧长，可以去求区域的面积，也可以去计算很多物理问题。

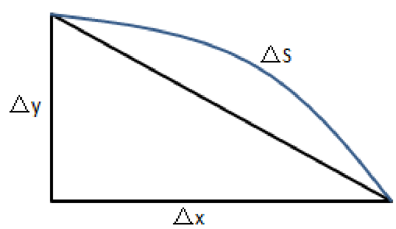
弧长

弧长的定义

曲线上两点之间的曲线长度称为弧长，现在我们试图用积分定义弧长。



将上图的曲线分为n段，用直线连接相邻的两点，当Δx→0时，两点间的线段长度趋近于弧长：



将s定义为弧长，则：

$$\Delta s = s_i - s_{i-1}$$

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

用微分表示上式，可以去掉约等号：

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

习惯上，上式去掉括号：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

其它两种常见的变形：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

由此得到a、b两点间弧长的表达式：

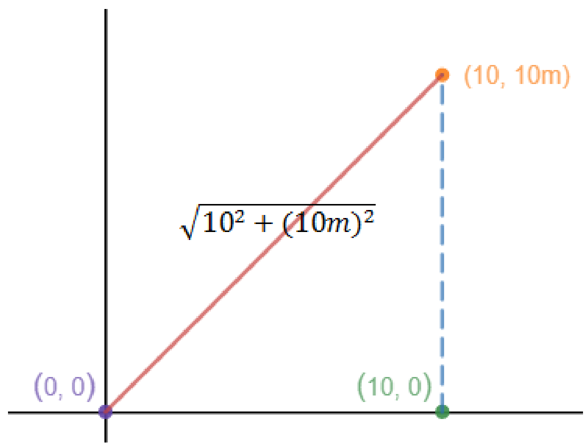
$$\text{弧长} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

线性函数的弧长

如果有曲线y = mx，则y′ = m，

$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + m^2}dx$ ，曲线在0 ≤ x ≤ 10处的弧长：

$$\int_0^{10} \sqrt{1 + m^2}dx = 10\sqrt{1 + m^2}$$



如上图所示，可以抛开积分直接计算两点间的弧长，其结果和积分运算相等。对于这个例子来说，结果是显然的，但是其表达的含义是：如果我们能对线性函数推导出这些公式，那么微积分也能告诉我们应该怎么做。微积分的思想就存在于这个简单的，甚至不需要微积分计算的过程中。所有这些工具，微分、积分、极限，可以应对任何曲线，因为我们将曲线分割成了无限小，这就是建立积分的思想。

单位圆的弧长

计算下图单位圆上的弧长s：

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

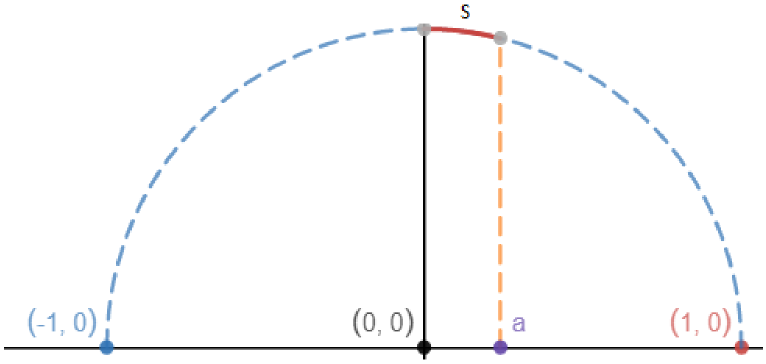
推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU



单位圆中：

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{1-x^2}$$

根据弧长公式：

$$s = \int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx$$

接下来就是求解积分的问题。

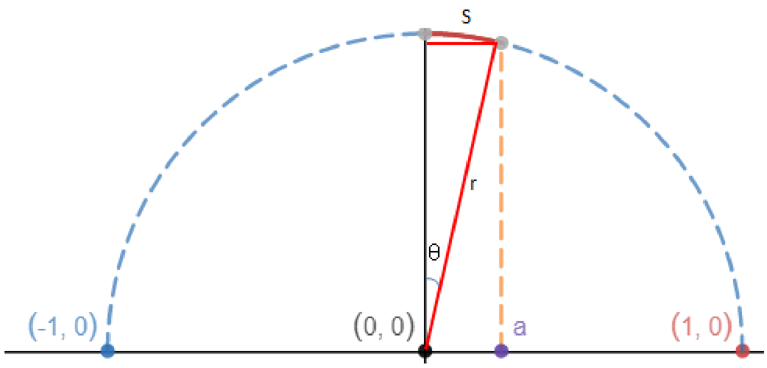
$x = sin\theta$

$$\int \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx = \int \sqrt{\frac{1}{1-sin^2\theta}}dsin\theta = \int \frac{1}{cos\theta}cos\theta d\theta = \theta$$

$$s = \int_0^a \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx = arcsinx\Big|_0^a = arcsina$$

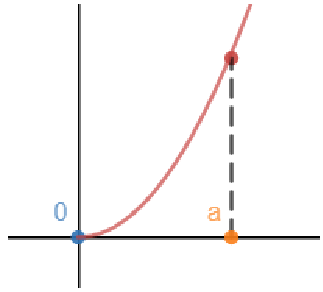
也可以写成：a = sins

在单位圆中，弧长s = 弧长夹角θ，a = rsinθ = sinθ，上面的计算结果与定义相同。



抛物线的弧

求曲线y = x^2在x∈[0, a]上的弧长。



$$ds = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+4x^2}dx$$

$$弧长 = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}dx$$

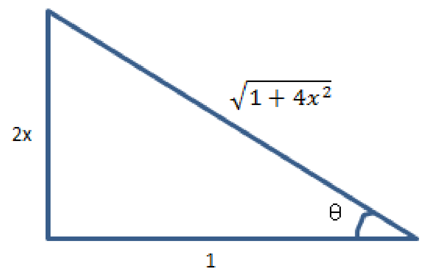
接下来是求解积分问题，令x = tanθ/2

$$\int_0^a \sqrt{1+4x^2}dx = \int_0^a \sqrt{1+4(tan\theta/2)^2}d\frac{tan\theta}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{1+tan^2\theta}dtan\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{sec^2\theta}sec^2\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a sec^3\theta d\theta$$

令u = secθ， v’ = sec^{2}θ， v = tanθ，u’ = secθtanθ

$$\int sec^3\theta d\theta = uv - \int u'vd\theta$$
$$= sec\theta tan\theta - \int sec\theta tan^2\theta d\theta$$
$$= sec\theta tan\theta - \int sec\theta(sec^2\theta - 1)d\theta$$
$$= sec\theta tan\theta - \int sec^3\theta d\theta + \int sec\theta d\theta$$

$$2\int sec^3\theta d\theta = sec\theta tan\theta + \int sec\theta d\theta$$
$$= sec\theta tan\theta + \ln(sec\theta + tan\theta +) + C$$



$$sec\theta tan\theta + \ln(sec\theta + tan\theta +) = 2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)$$

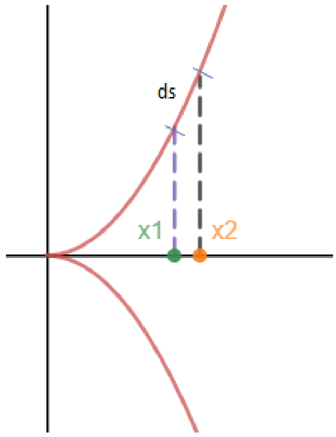
最终弧长：

$$\int_0^a \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a sec^3\theta d\theta$$
$$= \frac{2x\sqrt{1+4x^2}+\ln\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)}{4}\Bigg|_0^a$$

曲面面积

求解方法

曲线y = x^2绕x轴旋转一周，求在x在[0, a]上，立体图形的外表面积。



图形类似于喇叭口，可以使用圆盘法求解，只是将dx换成ds，上图中圆盘的表面积：

$$\varDelta S = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}dx$$

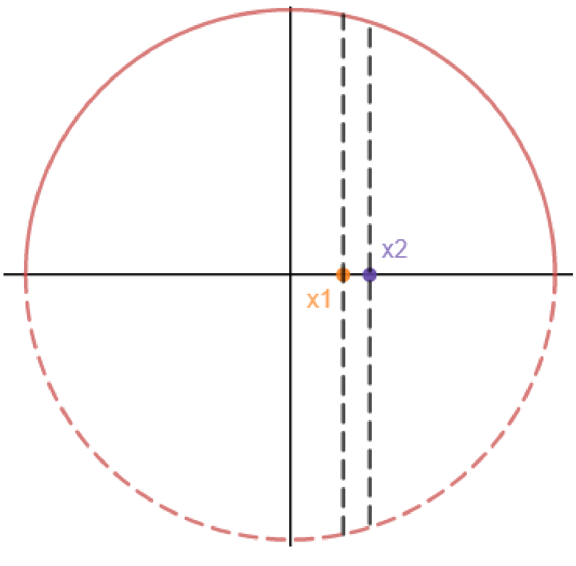
总面积：

$$S = \int_0^a 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

这个复杂的积分还是交给计算机吧。

球面面积

可以将球看作为半径为a的半圆$y^2 + x^2 = a^2$绕x轴旋转一周形成的图形，计算x在[x_1, x_2]处形成圆盘的球面面积：



$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \ y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}dx$$

$$S_{x1\sim x2} = \int_{x1}^{x2} 2\pi y ds = \int_{x1}^{x2} 2\pi a dx = 2\pi a(x_2 - x_1)$$

整个球体的表面积：

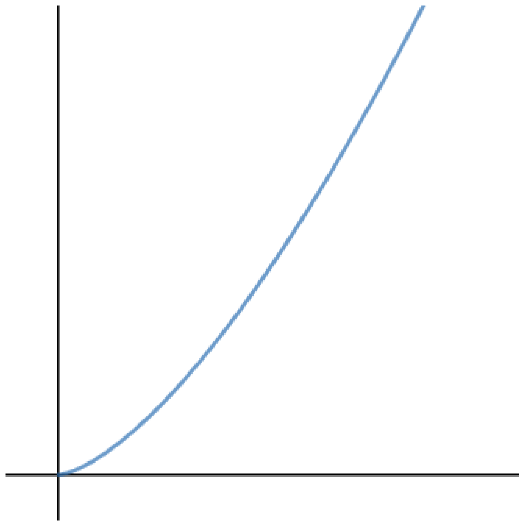
$$S_{whole} = \int_{-a}^{a} 2\pi y ds = 2\pi a(a + a) = 4\pi a^2$$

结果与球体表面积公式一致。

综合示例

示例1

计算$y = x^{3/2}$在$0 \le x \le 4$处的弧长。



$y = x^{3/2}$

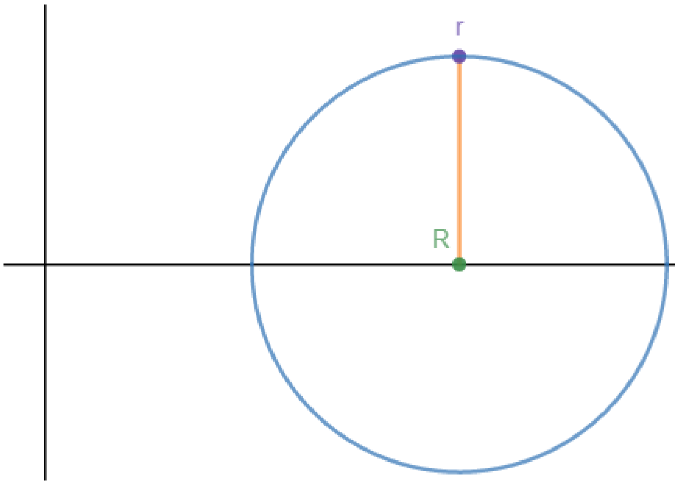
$$(y')^2 = \left(\frac{3x^{1/2}}{2}\right)^2 = \frac{9x}{4}$$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}dx$$

$$\int_0^4 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{1/2} dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1)$$

示例2

如下图所示，求圆心为R，半径为r的圆绕y轴旋转一周形成的环的表面积



由于是绕y轴旋转，表面积的微分是da = 2πxds，接下来就是如何求解ds和da的积分。

$$u=(x-R)^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=\frac{d(r^2-u)^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(x-R)^2}{dx}\\&=\frac{1}{2}(r^2-u)^{-\frac{1}{2}}(-1)\cdot 2(x-R)\\&=-(r^2-(x-R)^2)^{-\frac{1}{2}}(x-R)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ds=\sqrt{1+(y')^2}dx&=\sqrt{1+\left(-(r^2-(x-R)^2)^{-\frac{1}{2}}(x-R)\right)^2}\,dx\\&=\sqrt{1+\frac{(x-R)^2}{r^2-(x-R)^2}}dx\\&=\frac{rdx}{\sqrt{r^2-(x-R)^2}}\end{aligned}$$

上半圆的表面积：

$$S_{half}=\int_{R-r}^{R+r}2\pi x\frac{rdx}{\sqrt{r^2-(x-R)^2}}=2\pi r\int_{R-r}^{R+r}\frac{xdx}{\sqrt{r^2-(x-R)^2}}$$

又是求解积分的问题了，令u = x - R

$$2\pi r\int_{R-r}^{R+r}\frac{xdx}{\sqrt{r^2-(x-R)^2}}=2\pi r\int_{-r}^{r}\frac{(u+R)du}{\sqrt{r^2-u^2}}$$

令u = rsint，du = rcostdt；u的取值范围是[r, -r]，所以t的取值范围是[π/2, -π/2]

$$2\pi r\int_{-r}^{r}\frac{(u+R)du}{\sqrt{r^2-u^2}}=2\pi r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(rsint+R)rcostdt}{\sqrt{r^2-(rsint)^2}}$$

$$=2\pi r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(rsint+R)rcostdt}{rcost}$$

$$=2\pi r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(rsint+R)dt$$

$$=2\pi r(rcost+Rt)|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=2\pi^2 rR$$

$$S_{whole}=2S_{half}=4\pi^2 rR$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”

随笔

分类: 单变量微积分

标签: 积分, 弧长, 表面积

« 上一篇： 单变量微积分笔记24——分部积分
» 下一篇： 单变量微积分笔记26——参数方程

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
- 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人： 本金63万，月兑25元不够卖菜

» 更多新闻...